数理解析研究所講究録
594巻 1986年 1-11

拡張された Selberg 積分のみたす Gauß-Manin 系

超平面配置に附随する解析的積分の中にはきわめて対称性の大きいものがある. その対称性の故にきわだった興味ある特徴を示し, それ故に応用を与えてくれる場合がある. 今回は A.Selberg が 1944年に発表した積分公式 (長い間ほとんど注目されていなかったが F. Dyson や M.L. Mehta それに米国の特殊関数の専門家 R. Askey, I.G. Macdonald などの人々の仕事とのつながりでその重要性が認識されている) の構造を我々の一般的立場から見直してみる事にする. なお この公式は数年前, 三輪・神保両氏より知らされ, 両氏の仕事との関連性を指摘された事が動機となっている事を附記します.

出発点は次の積分である。

今 $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ となる実数列を勝手に与えて積分

$$(1)\quad F(x_1,\cdots,x_p) = \int \prod_{1\leq i<j\leq N} (x_i - x_j)^{\lambda_{ij}}\, dx_{p+1}\wedge\cdots\wedge dx_N$$

$(2\leq p\leq N)$ を考える。これを $x_1,\cdots,x_p$ の関数と考えてその微分方程式系（Gauß-Manin connection 又は holonomic system）を計算する。

$$\Phi = \prod_{1\leq i<j\leq N} (x_i - x_j)^{\lambda_{ij}}, \quad \omega = d\log\Phi$$

とおいて積分を定義する twisted de Rham cohomology $(\nabla_\omega = d + \omega\wedge)$ $H^*(X, \nabla_\omega)$ を $X = \mathbb{C}^{N-p} - \bigcup_{1\leq i<j\leq N} (x_i = x_j)$ 上で計算する。この有限次元性はよく知られているが、さらに λ_{ij} について次の generic な条件をおく

(C,1) 任意の $r\geq p$, $j<p$ に対して

和

$$\sum_{s=p}^{r}\lambda_{j,s}+\sum_{p\leq i<j\leq r}\lambda_{i,j}$$

$$-\left\{\sum_{j=1}^{p-1}\left\{\sum_{s=p}^{r}\lambda_{j,s}+\sum_{p\leq s<t\leq r}\lambda_{s,t}\right\}\right\}$$

は $0, 1, 2, 3, \cdots$ のどれとも相異なる.

このとき超平面配置の一般的結果の帰結として

Prop. i) $H^{l}(X, \nabla_\omega) = 0 \quad l \neq N-p$

ii) $H^{N-p}(X, \nabla_\omega)$ は logarithmic form

(以下 $(i, j) = x_i - x_j$ と略記する)

$\langle i_{p+1}, \cdots, i_N \rangle = d\log(p+1, i_{p+1}) \wedge \cdots \wedge d\log(N, i_N)$

$-1+\nu \geq i_\nu$ の線型結合で張られる.

これらの間には $(N-p)\, p(p+1)\cdots(N-2)$ 個の線型の関係があり, 基底としては $i_\nu \geq 2$ となるもののみが得られる.

証明は [A1] を参照.

さて Gauß-Manin connection を求めるために統計物理の概念であるクラスター(房)の類似を定義しておく.

数の組 $\{i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ が $i_\nu \leqq \nu-1$ をみたすとき"可容である"という事にする. 今, 可容な組 $\{i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ が与えられたとき 数の集合 $\{p+1, \cdots, N\} \cup \{i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ にグラフの構造を導入する: ν と i_ν とを辺で結び ν を始点, i_ν を終点とする矢印を書く. こうして $\{p+1, \cdots, N, i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ は方向づけのグラフになる. この連結成分はすべて樹木である. しかも終点 j はつねに $j \leqq p$ をみたす. 我々はこの各連結成分をクラスターと呼ぶ. こうして数の集合 $\{p+1, \cdots, N, i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ はクラスターに分割される. 逆に数の集合 $\{p+1, \cdots, N, i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ はクラスター分割によって一意に決まる. こうして数の組 $\{i_{p+1}, \cdots, i_N\}$ はそのクラスター分割と一対一に対応する事になる.

さて $(N-p)$次の微分形式 $\langle i_{p+1}, \cdots, i_N \rangle$ を用いた積分を次のように定義する:

$$\widetilde{\langle i_{p+1}, \cdots, i_N \rangle} = \int \Phi \langle i_{p+1}, \cdots, i_N \rangle$$

（積分域はホモロジー類として決める）

このとき

定理1.

(2) $d\,\widetilde{\langle i_{p+1}, \cdots, i_N \rangle}$

$$= \sum_{s=1}^{N-p} \sum_{0<\nu_1<\cdots<\nu_s} d\log(i_{p+\nu_1}, i'_{p+\nu_1})\, \lambda_{p+\nu_s, i'_{p+\nu_s}}$$

$$\cdot \widetilde{\left\langle i_{p+1}, \cdots, \begin{Bmatrix} i_{p+\nu_1} \\ i'_{p+\nu_1} \end{Bmatrix}, \cdots, \begin{Bmatrix} i_{p+\nu_s} \\ i'_{p+\nu_s} \end{Bmatrix}, \cdots, i_N \right\rangle}$$

$$+ \sum_{1 \leq j < k \leq p} \lambda_{j,k}\, d\log(j,k)\, \widetilde{\langle i_{p+1}, \cdots, i_N \rangle}$$

但しここで

$$\left\langle \cdots \begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} \cdots \right\rangle$$

$$= \langle \cdots i \cdots \rangle - \langle \cdots j \cdots \rangle$$

を意味する.

$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ の選び方は次の通りである:

今 $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta \leq p$ が与えられたとする. $p+\nu_1$ を $i_{p+\nu_1}$ が α 又は β に等しくなる最小の番号とする. 今 $\alpha = i_{p+\nu_1}$ としよう. このとき $i'_{p+\nu_1} = \beta$ とおく. $p+\nu_2$ を

$$i_{p+\nu_2} \in \{\alpha, \beta, p+\nu_1\} - \{i_{p+\nu_1}\}$$

となる最小の番号とし,

$$i'_{p+\nu_2} \in \{\alpha, \beta, p+\nu_1\} - \{i_{p+\nu_1}, i_{p+\nu_2}\}$$

以下 $i_{p+\nu_t}, i'_{p+\nu_t}$ を

$$i_{p+\nu_t} \in \{\alpha, \beta, p+\nu_1, \cdots, p+\nu_{t-1}\} - \{i_{p+\nu_1}, \cdots, i_{p+\nu_{t-1}}\}$$

$$i'_{p+\nu_t} \in \{\alpha, \beta, p+\nu_1, \cdots, p+\nu_{t-1}\} - \{i_{p+\nu_1}, \cdots, i_{p+\nu_t}\}$$

によって可能なまで続ける. 可能な最大番号が $p+\nu_s$ というわけである. この事柄からわかるように $\{i_{p+\nu_1}, p+\nu_1, \cdots, p+\nu_s\}$ はひとつのクラスターの中の線片になっている.

さて次に λ_{ij} にさらに条件

(C2) $$\begin{cases} \lambda_{ij}=0 & i,j\leq p \\ \lambda_{ij}=\lambda_j' & j\leq p,\ i\geq p+1 \\ \lambda_{ij}=\lambda & i,j\geq p+1 \end{cases}$$

を課す事にする.

すると Φ は $\{p+1,\cdots,N\}$ の置換 $\mathfrak{S}_{N-p}$ の元の作用に対して不変である.

以下 積分域 G が $\mathfrak{S}_{N-p}$ の作用について不変であると仮定する. すると積分 $\widetilde{\langle i_{p+1},\cdots,i_N\rangle}$ を考えるに,

もしも $\langle i_{p+1},\cdots,i_N\rangle$ が $\mathfrak{S}_{N-p}$ の元のひとつに対して交代的ならば 積分 $\widetilde{\langle i_{p+1},\cdots,i_N\rangle}$ は 0 に等しくなる.

この事実は積分(1) の構造を著しく簡易化してしまうのである. すなわち次が成り立つ.

今 $\langle i_{p+1},\cdots,i_N\rangle$ $i_\nu\leq k-1$ (可容な微分型式) の クラスター分割を

$$K_1 \perp\!\!\!\perp K_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp K_s$$

とする（各 K_ν がクラスター）. 番号 $r \geq p+1$ に対して，$r \in K_\nu$ ならば j_r を K_ν の終点にある番号とする ($j_r \leq p$).

すると

Lemma. $\langle \widetilde{i_{p+1}, \ldots, i_N} \rangle$ は i_r を j_r におき換えたもの $\langle \widetilde{j_{p+1}, \ldots, j_N} \rangle$ の常数倍（$x_1, \ldots, x_p$ に依存しない）に等しい.

従って我々は以下 $i_\nu \leq p$ なる条件をみたす $\langle i_{p+1}, \ldots, i_N \rangle$ のみを扱う事にする.

$i_\nu = j \leq p$ をみたす ν の個数を ν_j とおくとき 積分 $\langle \widetilde{i_{p+1}, \ldots, i_N} \rangle$ は $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ のみに依存して決まる.

そこで

$$\langle \widetilde{i_{p+1}, \ldots, i_N} \rangle = \langle \widetilde{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots p^{\nu_p}} \rangle$$

と書く、ここで $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = N - p$ に注意して下さい.

この時 Th1. は次のように単純化される.

Th 2.

(3) $d\langle \widetilde{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots p^{\nu_p}} \rangle$

$$= \sum_{1 \leqq i < j \leqq p} d\log(i, j) \Big\{ \lambda \nu_i \nu_j \Big[\langle \widetilde{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots p^{\nu_p}} \rangle$$

$$- \frac{1}{2} \langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots i^{\nu_i - 1} \cdots j^{\nu_j + 1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle$$

$$- \frac{1}{2} \langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots i^{\nu_i + 1} \cdots j^{\nu_j - 1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle \Big]$$

$$+ \lambda_i \nu_j \Big[\langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle - \langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots i^{\nu_i + 1} \cdots j^{\nu_j - 1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle \Big]$$

$$+ \lambda_j \nu_i \Big[\langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle - \langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots i^{\nu_i - 1} \cdots j^{\nu_j + 1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle \Big] \Big\}$$

但し 次の関係式がある.

$$\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\lambda}{2} \nu_j + \lambda_j \right) \langle \widetilde{1^{\nu_1} \cdots j^{\nu_j + 1} \cdots p^{\nu_p}} \rangle = 0$$

基底の個数は $\dfrac{(p-1)p\cdots(N-2)}{(N-p)!}$ である。

さて $p=2$ のときが A.Selberg のもとの積分である。この場合には基底は1個であって

$$\langle 1^{N-p} \rangle$$ を取ればよい。

この場合(3)は自明となり、(1)は

$$(4) \qquad C\,(x_2-x_1)^M \qquad (C : \mathrm{const})$$

と簡約化される。但し

$$M=(\lambda_1+\lambda_2+1)(N-2)+\frac{(N-2)(N-3)}{2}\lambda$$

で C は Selberg の公式

$$C=\prod_{n=1}^{N-2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{n\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\lambda_1+1+\frac{(n-1)\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\lambda_2+1+\frac{(n-1)\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\lambda_1+\lambda_2+2+\frac{(N+n-4)\lambda}{2}\right)}$$

によって与えられる。最後にこの公式自身も(1)の twisted de Rham cohomology の構造から出て来る事をつけ加えて

おきます(R. Askey 氏によるコメント)([A2] をみよ。)

文献

[A1] K. Aomoto, Gauß-Manin connection of integral of difference products, (Jour. of Math. Soc. Japan に投稿中)

[A2] ——, Jacobi polynomials associated with Selberg integrals, (S.I.A.M. Jour. に投稿中)

[As] R. Askey, SIAM J. Math. Anal. 11, 1980, 938–951

[S] A. Selberg, Norsk Mat. Tidsskr., 26 (1944), 71–78

[Ts] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Fock space representation of the Virasoro algebra, preprint, Nagoya, 1984.

名大 青本和彦

Aomoto Kazuhiko